Corrigé de la deuxième session

Exercice 1

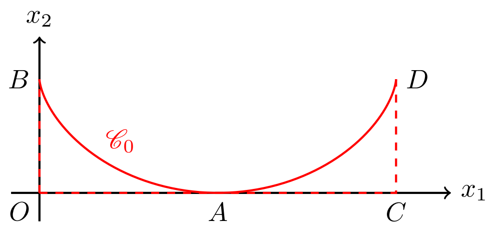

FIGURE 1 – Exercice 1 : domaine $\mathcal{D}$ de frontière $\mathscr{C}$

1. (a) Les fonctions $t \mapsto x_1(t)$ et $t \mapsto x_2(t)$ sont dérivables sur I, avec $x_1'(t) = 1 - \cos t \geqslant 0$ et $x_2'(t) = -\sin t$. D'où le tableau de variations suivant :

t	0		π		2π
$x_1'(t)$	0	$+$	2	$+$	0
x_1	0	$\nearrow$			2π
x_2	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2
$x_2'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$\frac{x_2'(t)}{x_1'(t)}$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$

FIGURE 2 – Exercice 1 : tableau de variations du paramétrage de $\mathscr{C}_0$

   (b) On a : $A(\pi, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2\pi, 0)$ et $D(2\pi, 2)$. De plus, on a $B = \mathbf{M}(0)$, $A = \mathbf{M}(\pi)$ et $D = \mathbf{M}(2\pi)$.

   (c) $\mathscr{C}_0$ est parcourue de B vers D.

2. Commençons par calculer la longueur de $\mathscr{C}_0$. Comme $\mathscr{C}_0$ correspond à la courbe paramétrée $t \mapsto \mathbf{M}(t)$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathscr{C}_0| &= \int_0^{2\pi} \|\mathbf{M}'(t)\| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \, \mathrm{d}t \\
\text{(par parité)} &= 4 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = 8.
\end{aligned}$$

On a alors :

$$|\mathscr{C}| = |\mathscr{C}_0| + OB + OC + CD = 12 + 2\pi.$$

3. On introduit le champ de vecteurs $\mathbf{V}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$. D'après le théorème de Green-Riemann, en orientant $\mathscr{C}$ dans le sens direct, on a :
$$|\mathcal{D}| = \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{\mathscr{C}} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{M}.$$
On paramètre le segment $[OC]$ par $\{(t,0),\ t \in [0, 2\pi]\}$, $[CD]$ par $\{(2\pi, t),\ t \in [0,2]\}$ et $[BO]$ par $\{(0, 2-t),\ t \in [0,2]\}$. D'où :
$$\begin{aligned} |\mathcal{D}| &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ t - \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= 4\pi + \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t \, \mathrm{d}t = 4\pi + [-t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t \, \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} \mathrm{d}t = \pi. \end{aligned}$$

4. Déterminons la valeur de la circulation de $\mathbf{U}_1$ le long de $\mathscr{C}_A$ orientée de B vers A.
$$\begin{aligned} I_1 = \int_{\mathscr{C}_A} \mathbf{U}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{M} &= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} e^{x_1(t)} \\ x_1(t) x_2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} e^{x_1(t)} x_1'(t) - t \sin t + \sin^2 t - t \cos t \sin t + \sin^2 t \cos t \, \mathrm{d}t \\ &= \left[e^{x_1(t)} + (t-1) \cos t + \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{(t-1)\cos(2t)}{4} + \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{\pi} \\ &= e^{\pi} - (\pi - 1) + 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{(\pi - 1) - 1}{4} = e^{\pi} - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Le domaine $\mathcal{D}$ peut également être paramétré par :
$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leqslant x_1 \leqslant 2,\ \sqrt{1 - x_1^2} \leqslant x_2 \leqslant \sqrt{4 - x_1^2}.$$
D'où la figure :

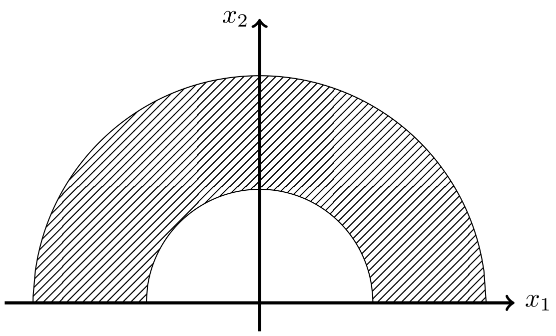

FIGURE 3 – Exercice 2 : domaine $\mathcal{D}$

2. Effectuons un changement de variables en coordonnées polaires : $x_1 = r \cos\theta$, $x_2 = r \sin\theta$ pour $r \in [1,2]$ et $\theta \in [0, \pi]$. On a alors, par le théorème de changement de variables puis par le théorème de Fubini :
$$I_2 = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \iint_{[1,2]\times[0,\pi]} \sqrt{r^2} \times r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \pi \int_1^2 r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{7\pi}{3}.$$

Exercice 3

1. Le domaine $\mathcal{D}$ est le suivant :

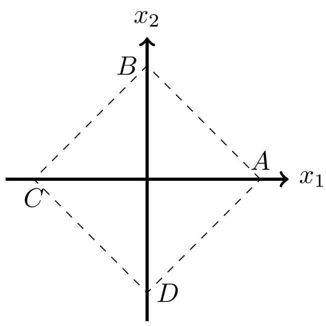

FIGURE 4 – Exercice 3 : domaine $\mathcal{D}$

2. Par définition, on a :

$$\nabla \wedge \mathbf{U}_3(x_1,x_2) = \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) = -x_2^2 + 3x_2^2 = 2x_2^2.$$

3.

	Équation cartésienne	Équation paramétrique	Sens
$[AB]$	$x_1 + x_2 = 1$	$(1-t,t),\ t\in[0,1]$	Direct
$[BC]$	$x_2 - x_1 = 1$	$(t,1+t),\ t\in[-1,0]$	Indirect
$[CD]$	$x_2 + x_1 = -1$	$(t,-1-t),\ t\in[-1,0]$	Direct
$[DA]$	$x_1 - x_2 = 1$	$(t,t-1),\ t\in[0,1]$	Direct

4. On applique le théorème de Fubini en récrivant le domaine $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x_2\leqslant 1,\ x_2-1\leqslant x_1\leqslant 1-x_2\}\cup\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : -1\leqslant x_2\leqslant 0,\ -x_2-1\leqslant x_1\leqslant 1+x_2\}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\mathcal{D}} 2x_2^2\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 2\left[\int_0^1 x_2^2\left(\int_{x_2-1}^{1-x_2}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2 + \int_{-1}^0 x_2^2\left(\int_{-x_2-1}^{1+x_2}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\right] \\ &= 4\int_0^1 x_2^2(1-x_2)\,\mathrm{d}x_2 + 4\int_{-1}^0 x_2^2(1+x_2)\,\mathrm{d}x_2 = 4\left[\frac{x_2^3}{3}-\frac{x_2^4}{4}\right]_0^1 + 4\left[\frac{x_2^3}{3}+\frac{x_2^4}{4}\right]_{-1}^0 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 4

1. La fonction f est défini sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 1\}$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$ privé des branches d'hyperbole $x_2 = 1/x_1$ (voir figure ci-dessous). Cela découpe ainsi le domaine en 3 sous-ensembles $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_+$.

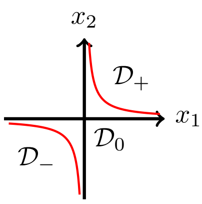

FIGURE 5 – Exercice 4 : ensemble de définition de f ($\mathbb{R}^2$ privé des courbes rouges)

2. Déterminons les dérivées partielles de f sur son ensemble de définition.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}\right)^2} \times \frac{1 - x_1x_2 + x_2(x_1 + x_2)}{(1 - x_1x_2)^2} - \frac{1}{1 + x_1^2} = \frac{1}{1 + x_2^2} 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 - \frac{1}{1 + x_1^2} = 0.$$

   On remarque que la fonction f est symétrique en x_1 et x_2. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Le gradient de f est ainsi nul ce qui signifie que f est constante sur chaque composante connexe de son ensemble de définition.

3. Avec $\arctan 0 = 0$ et $\arctan(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\pi}{3}$, on vérifie que :

$$f(0, 0) = 0, \quad f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -\pi, \quad f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \pi.$$

   On en déduit que :

$$f_{|\mathcal{D}_0} = 0, \quad f_{|\mathcal{D}_+} = -\pi, \quad f_{|\mathcal{D}_-} = \pi.$$